Variabile aleatoare

*Lect. dr. Voichit¸a Radu, Lect. dr. Alexandru-Darius Filip*

Universitatea Babe¸s-Bolyai Cluj-Napoca

Facultatea de S¸tiint¸e Economice ¸si Gestiunea Afacerilor

Departamentul de Statistic˘a-Previziuni-Matematic˘a

*Proiect ROSE*

decembrie 2020

Variabile aleatoare

Variabile aleatoare

de tip discret

Variabile aleatoare de tip discret

Fie variabila aleatoare de tip discret

*x*1 *x*2 *. . . xn*

*X* :

Probleme principale: I. Calcul de parametri

*p*1 *p*2 *. . . pn*

II. Operat¸ii cu variabile aleatoare III. Funct¸ia de repartit¸ie

IV. Calcul de probabilit˘at¸i V. Caracteristici numerice

I. Calcul de parametri

Problema 1: Fie variabila aleatoare

*−*1 0 2 3

*X* :

0*,* 1 *p* 0*,* 4 0*,* 2

S˘a se determine parametrul real *p* astfel ˆıncˆat *X* s˘a fie o variabil˘a aleatoare de tip discret.

Rezolvare: Se ¸stie c˘a ˆın orice variabil˘a aleatoare de tip discret, suma probabilit˘at¸ilor care se afl˘a pe linia a doua din distribut¸ia lui *X* este 1.

Avem

0*,* 1 + *p* + 0*,* 4 + 0*,* 2 = 1 *⇔* 0*,* 7 + *p* = 1

de unde obt¸inem .

| *p* = 0*,* 3 |
| --- |

I. Calcul de parametri

Problema 2: Fie variabilele aleatoare

*X* :

*−*1 0 2 3 0*,* 1 0*,* 2 0*,* 3 *p*

¸si *Y* :

*−*2 2 4 *p q* 0*,* 2

S˘a se determine parametrii reali *p* ¸si *q* astfel ˆıncˆat *X* ¸si *Y* s˘a fie variabile aleatoare de tip discret.

Rezolvare: Avem sistemul:

(

0*,* 1 + 0*,* 2 + 0*,* 3 + *p* = 1 *p* + *q* + 0*,* 2 = 1*⇔*

(

0*,* 6 + *p* = 1

*p* + *q* + 0*,* 2 = 1*⇔*

(

*⇔*

| *p* = 0*,* 4 |
| --- |

0*,* 4 + *q* + 0*,* 2 = 1 *⇒*

| *q* = 0*,* 4 |
| --- |

II. Operat¸ii cu variabile aleatoare

Problema 1: Fie variabila aleatoare

*X* :

*−*1 0 2 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

S˘a se scrie distribut¸iile variabilelor aleatoare: 2 + *X*, 3*X* ¸si *X*4. Rezolvare: Avem:

2 + *X* =

2 + (*−*1) 2 + 0 2 + 2 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

=

1 2 4 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

*.*

3*X* =

3 *·* (*−*1) 3 *·* 0 3 *·* 2 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

=

*−*3 0 6 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

*.*

*X*4 =

(*−*1)4 04 24 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

=

1 0 16 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

=

0 1 16 0*,* 3 0*,* 5 0*,* 2

*.*

II. Operat¸ii cu variabile aleatoare Problema 2: Fie variabilele aleatoare independente

*X* :

*−*1 0 2 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

¸si *Y* :

1 3 0*,* 3 0*,* 7

S˘a se scrie distribut¸iile variabilelor aleatoare: *X* + *Y* ¸si *XY* . Rezolvare: Avem:

*X* + *Y* =

*−*1 0 2 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

+

1 3 0*,* 3 0*,* 7

*−*1 + 1 *−*1 + 3 0 + 1 0 + 3 2 + 1 2 + 3

=

0*,* 5 *·* 0*,* 3 0*,* 5 *·* 0*,* 7 0*,* 3 *·* 0*,* 3 0*,* 3 *·* 0*,* 7 0*,* 2 *·* 0*,* 3 0*,* 2 *·* 0*,* 7

0 2 1 3 3 5

=

0*,* 15 0*,* 35 0*,* 09 0*,* 21 0*,* 06 0*,* 14

0 1 2 3 5 =

0*,* 15 0*,* 09 0*,* 35 0*,* 27 0*,* 14

*.*

II. Operat¸ii cu variabile aleatoare

*XY* =

*−*1 0 2 0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

*·*

1 3 0*,* 3 0*,* 7

*−*1 *·* 1 *−*1 *·* 3 0 *·* 1 0 *·* 3 2 *·* 1 2 *·* 3 =

0*,* 5 *·* 0*,* 3 0*,* 5 *·* 0*,* 7 0*,* 3 *·* 0*,* 3 0*,* 3 *·* 0*,* 7 0*,* 2 *·* 0*,* 3 0*,* 2 *·* 0*,* 7

*−*1 *−*3 0 0 2 6 =

0*,* 15 0*,* 35 0*,* 09 0*,* 21 0*,* 06 0*,* 14

*−*1 *−*3 0 2 6

=

0*,* 15 0*,* 35 0*,* 30 0*,* 06 0*,* 14

*−*3 *−*1 0 2 6 =

0*,* 35 0*,* 15 0*,* 30 0*,* 06 0*,* 14

*.*

III. Funct¸ia de repartit¸ie

Problem˘a: Fie variabila aleatoare

*−*1 0 2

*X* :

0*,* 5 0*,* 3 0*,* 2

Construit¸i funct¸ia de repartit¸ie asociat˘a variabilei aleatoare *X*. Rezolvare: Funct¸ia de repartit¸ie asociat˘a variabilei *X* este:

*FX* : R *→* [0*,* 1]*, FX* (*x*) = *P*(*X < x*)*.*

Dac˘a *x ∈* (*−∞, −*1] *⇒ FX* (*x*) = *P*(*X < x−*1) = 0. Dac˘a *x ∈* (*−*1*,* 0] *⇒ FX* (*x*) = *P*(*X < x*0) = 0*,* 5. Dac˘a *x ∈* (0*,* 2] *⇒ FX* (*x*) = *P*(*X < x*2) = 0*,* 5 + 0*,* 3 = 0*,* 8. Dac˘a *x ∈* (2*,* +*∞*) *⇒ FX* (*x*) = *P*(*X < x*+*∞*) = 0*,* 8 + 0*,* 2 = 1.

III. Funct¸ia de repartit¸ie

A¸sadar avem



*FX* : R *→* [0*,* 1]*, FX* (*x*) =



0*,* dac˘a *x ∈* (*−∞, −*1] 0*,* 5*,* dac˘a *x ∈* (*−*1*,* 0] 0*,* 8*,* dac˘a *x ∈* (0*,* 2] 1*,* dac˘a *x ∈* (2*,* +*∞*)*.*

IV. Calcul de probabilit˘at¸i

Problem˘a: Fie variabila aleatoare

*−*1 0 2 3 6

*X* :

0*,* 1 0*,* 2 0*,* 1 0*,* 4 0*,* 2

Calculat¸i *P*(*−*1 *< X <* 3) ¸si *P*(*−*1 *< X ≤* 3).

Rezolvare:

Pentru *P*(*−*1 *< X <* 3) avem *X* :

*−*1 0 2 3 6 0*,* 1 0*,* 2 0*,* 1 0*,* 4 0*,* 2

*,*

deci *P*(*−*1 *< X <* 3) = 0*,* 2 + 0*,* 1 = 0*,* 3*.* *−*1 0 2 3 6

Pentru *P*(*−*1 *< X ≤* 3) avem *X* :

*,*

0*,* 1 0*,* 2 0*,* 1 0*,* 4 0*,* 2

deci *P*(*−*1 *< X ≤* 3) = 0*,* 2 + 0*,* 1 + 0*,* 4 = 0*,* 7*.*

V. Caracteristici numerice

Problem˘a: Fie variabila aleatoare

*−*1 0 2

*X* :

0*,* 4 0*,* 5 0*,* 1

Calculat¸i valoarea medie, momentele de ordinul 2 ¸si 3, dispersia, abaterea medie p˘atratic˘a, momentele centrate de ordinul 2 ¸si 3 pentru *X*.

Rezolvare: Avem:



*−*1*x*20*x*32 *x*1



*X* :



0*,* 4 *p*1

0*,* 5 *p*2

0*,* 1 *p*3



Valoarea medie: *M*(*X*) = *x*1*p*1 + *x*2*p*2 + *x*3*p*3

*M*(*X*) = (*−*1) *·* 0*,* 4 + 0 *·* 0*,* 5 + 2 *·* 0*,* 1 = *−*0*,* 2*.*

Momentul de ordinul 2: *ν*2(*X*) = *M*(*X*2) = *x*21 *p*1 + *x*22 *p*2 + *x*23 *p*3 *ν*2(*X*) = *M*(*X*2) = (*−*1)2*·* 0*,* 4 + 02*·* 0*,* 5 + 22*·* 0*,* 1 = 0*,* 8*.* Momentul de ordinul 3: *ν*3(*X*) = *M*(*X*3) = *x*31 *p*1 + *x*32 *p*2 + *x*33 *p*3 *ν*3(*X*) = *M*(*X*3) = (*−*1)3*·* 0*,* 4 + 03*·* 0*,* 5 + 23*·* 0*,* 1 = 0*,* 4*.*

V. Caracteristici numerice

Dispersia:

| *D*(*X*) = *M*(*X*2) *− M*(*X*)2 |
| --- |

Abaterea medie p˘atratic˘a:

= 0*,* 8 *−* (*−*0*,* 2)2 = 0*,* 76*.*

p=p0*,* 76 = 0*,* 872

| *σ*(*X*) = *D*(*X*) |
| --- |

Momentul centrat de ordinul 2:

| *µ*2(*X*) = *D*(*X*) |
| --- |

Momentul centrat de ordinul 3:

= 0*,* 76

*µ*3(*X*) = [*−*1 *− M*(*X*)]3*·* 0*,* 4 + [0 *− M*(*X*)]3*·* 0*,* 5 + [2 *− M*(*X*)]3*·* 0*,* 1 = (*−*1 + 0*,* 2)3*·* 0*,* 4 + (0 + 0*,* 2)3*·* 0*,* 5 + (2 + 0*,* 2)3*·* 0*,* 1 = 0*,* 864*.*

Variabile aleatoare

Variabile aleatoare

de tip continuu

Variabile aleatoare de tip continuu Fie variabila aleatoare de tip continuu

*X* :

*x*

*f* (*x*)

*x∈*R

unde *f* : R *→* R este densitate de probabilitate pentru *X*. Probleme principale:

I. Calcul de parametri

II. Caracteristici numerice

I. Calcul de parametri

Problem˘a: Fie variabila aleatoare

*X* :

*x*

*f* (*x*)

*x∈*R

(

unde *f* : R *→* R*, f* (*x*) =

*ce−x*+2*, x >* 0 0*, x ≤* 0

S˘a se determine parametrul real *c >* 0 astfel ˆıncˆat funct¸ia *f* s˘a fie densitate de probabilitate pentru variabila *X*.

Rezolvare: Se ¸stie c˘a funct¸ia *f* este densitate de probabilitate pentru variabila *X* dac˘a

Z

| *f* (*x*)*dx* = 1  R |
| --- |

I. Calcul de parametri Avem

1 =

Z R

*f* (*x*)*dx* =

Z +*∞ −∞*

*f* (*x*)*dx* =

Z 0

*−∞*

*f* (*x*)*dx* +

Z +*∞* 0

*f* (*x*)*dx* =

=

Z 0

*−∞*

0*dx* +

Z +*∞* 0

*ce−x*+2*dx* = *ce*2

Z +*∞* 0

*e−xdx* =

= *ce*2

Z +*∞* 0

*x*0*e−xdx* = *ce*2*·* Γ(1) = *ce*2*.*

Deci *c* =1*e*~~2~~.

II. Caracteristici numerice Problem˘a: Fie variabila aleatoare

*X* :

*x*

*f* (*x*)

*x∈*R

(

unde *f* : R *→* R*, f* (*x*) =

*xe−x, x >* 0 0*, x ≤* 0

Calculat¸i valoarea medie, momentele de ordinul 2 ¸si 3, dispersia ¸si abaterea medie p˘atratic˘a a variabilei *X*.

Rezolvare:

Valoarea medie:

Avem

Z

Z

| *M*(*X*) =  *x · f* (*x*)*dx*  R |
| --- |

Z +*∞*

*M*(*X*) =

R

*x · f* (*x*)*dx* = 0

*x*2*e−xdx* = Γ(3) = 2! = 2*.*

II. Caracteristici numerice

Z

Momentul de ordinul 2: Z

| *ν*2(*X*) = *M*(*X*2) =  *x*2*· f* (*x*)*dx*  R  Z |
| --- |

~~+~~*~~∞~~*

*ν*2(*X*) = *M*(*X*2) = R

*x*2*· f* (*x*)*dx* = 0

*x*3*e−xdx* = Γ(4) = 3! = 6*.* Z

Momentul de ordinul 3: Z

| *ν*3(*X*) = *M*(*X*3) =  *x*3*· f* (*x*)*dx*  R  Z |
| --- |

~~+~~*~~∞~~*

*ν*3(*X*) = *M*(*X*3) = R

*x*3*· f* (*x*)*dx* = 0

*x*4*e−xdx* = Γ(5) = 4! = 24*.*

Dispersia:

| *D*(*X*) = *M*(*X*2) *− M*(*X*)2 |
| --- |

*D*(*X*) = *M*(*X*2) *− M*(*X*)2 = 6 *−* 22 = 2*.* Abaterea medie p˘atratic˘a: p

*σ*(*X*) = p*D*(*X*) = *√*2*.*

| *σ*(*X*) = *D*(*X*) |
| --- |